

PRODUIT D'ENTRELAACEMENT ET ACTION TRIANGULAIRE D'ALGÈBRES DE LIE

BARBEN-JEAN COFFI-NKETSIA ET LABIB HADDAD

RÉSUMÉ

En mimant les lois d'opérations infinitésimales des algèbres de Lie sur les variétés analytiques banachiques, on introduit de manière purement algébrique la notion d'action formelle d'une algèbre de Lie sur un espace vectoriel. Ensuite, par analogie avec le cas des groupes abstraits, et en faisant opérer les algèbres de Lie “en cascade”, on définit produit d'entrelacement (“wreath product”) et action triangulaire pour les algèbres de Lie. On démontre enfin un théorème du type Kaloujnine-Krasner pour les extensions d'algèbres de Lie.

INTRODUCTION

Le produit d'entrelacement (“wreath product”) W de deux groupes quelconques se définit commodément en faisant agir ces deux groupes “en cascade”, ce qui conduit à la notion classique d'action triangulaire. Lorsque l'on a affaire à des groupes **de Lie**, il est naturel de vouloir munir W (ou du moins un de ses sous-groupes substantiels) d'une structure convenable de groupe de Lie.

“Peut-on définir le produit d'entrelacement de deux groupes de Lie ?”

Cette question, posée par M. Krasner au premier de nous deux, est à l'origine de ce travail.

Le problème n'est pas aisé et ne semble toujours pas avoir été résolu.

Afin de tourner la difficulté, et comme première étape, nous avons voulu chercher d'abord une bonne définition pour un produit d'entrelacement de deux **algèbres** de Lie. C'est cela que nous proposons ci-dessous.

Pour y parvenir, nous avons besoin d'une notion d'**action** pour une algèbre de Lie quelconque. Elle devait être suffisamment générale pour être utilisable dans notre contexte.

Nous avons été, ainsi, amenés à forger un certain nombre d'outils. Ils nous paraissent avoir, par ailleurs, de l'intérêt en eux-mêmes. Nous en présentons l'essentiel dans cette note.

Nous avons ainsi défini, notamment, la dérivation suivant une série formelle à variables et coefficients dans un espace vectoriel X quelconque. Ce qui mène à l'introduction d'un objet nouveau, **l'algèbre de Lie $S(X)$ des séries formelles sur X** . D'où la notion nouvelle d'action formelle d'une algèbre de Lie quelconque sur l'espace vectoriel X . Et, singulièrement, l'action fondamentale d'une algèbre de Lie sur elle-même (qui mérite d'être signalée). D'où découle alors, assez naturellement, notre définition du produit d'entrelacement.

Un théorème de représentation (à la *Kaloujnine-Krasner*, voir [6]) vient enfin, à point nommé, illustrer le bon fonctionnement de ce produit d'entrelacement : toute extension C d'une algèbre de Lie B par une algèbre de Lie A se plonge dans le produit d'entrelacement de l'algèbre B par l'algèbre A . On remarquera, en particulier, la formule de ce plongement, (3) au paragraphe **13**.

Les constructions, ici, sont très différentes et beaucoup plus complexes que dans le cas classique des groupes. Ce pourrait être cependant le premier pas vers une “bonne” définition du produit d'entrelacement pour les **groupes de Lie**.

{**En effet**, on peut penser que l'algèbre de Lie $L(W)$ d'un produit d'entrelacement *convenable* W de deux groupes de Lie G et H devrait être le produit d'entrelacement de leurs algèbres de Lie respectives $L(G)$ et $L(H)$. L'on pourrait ainsi espérer remonter du produit d'entrelacement des algèbres à celui des groupes de Lie. Une des difficultés qui se présentent alors c'est le passage obligé du fini à l'infini car, même si les deux algèbres de Lie $L(G)$ et $L(H)$ sont, toutes deux, de dimension finie, leur produit d'entrelacement a une dimension infinie. Le produit d'entrelacement des deux groupes G et H devrait alors être *modélisé* sur un espace de Hilbert, ou de Banach pour le moins, de dimension infinie.}

Nous prévoyons de faire paraître ultérieurement tous les détails de nos constructions pour les algèbres de Lie. Ils sont nombreux. Ils ne sont pas toujours immédiats. Un texte est en préparation. Les numéros de la forme $< n >$ y renvoient.

Nous présentons, ici, les *grandes lignes* de la démarche.

DÉVELOPPEMENT

On se fixe un corps commutatif K de caractéristique nulle.

Tous les espaces vectoriels et toutes les algèbres de Lie considérés sont supposés avoir K comme corps des scalaires.

On désigne par E, F, X, Y , des espaces vectoriels et par A, B, C , des algèbres de Lie. Par m, n, r , on désignera des entiers naturels quelconques.

Pour chaque m , on désignera par $L_m(E; F)$ l'ensemble des applications m -linéaires sur E à valeurs dans F .

1 Séries formelles. On dira qu'une application $f : E \rightarrow F$ est un **polynôme homogène de degré m à variables dans E et coefficients dans F** lorsqu'il existe $u \in L_m(E; F)$ tel que

$$f(x) = u(x, x, \dots, x) \text{ pour tout } x \in E.$$

On dira alors que f est **déterminé** par u .

On désignera par $F[E]_m$ l'ensemble de ces polynômes homogènes de degré m . C'est naturellement un espace vectoriel (sur K). On posera

$$F[E] = \bigoplus_m F[E]_m, \quad F[[E]] = \prod_m F[E]_m.$$

On appelle alors **polynôme** (resp. **série formelle**) à variables dans E et coefficients dans F tout élément de $F[E]$ (resp. de $F[[E]]$).

Remarque. Dans le cas où E et F sont des espaces normés, on désigne par $\hat{P}(E; F)$ l'ensemble des **séries formelles à composantes continues** sur E à valeurs dans F (voir Bourbaki [1], p.88-89). Ainsi $\hat{P}(E; F)$ est un sous-espace vectoriel de $F[[E]]$, qui lui est égal lorsque la dimension de E est **finie**.

2 Symétrisation. Pour chaque

$$u \in L_m(E; F), \quad z = (z_1, \dots, z_r) \in E^r, \quad p = (p_1, \dots, p_r) \in \mathbb{Z}^r,$$

si $m = p_1 + \dots + p_r$, on désigne par $\tilde{u}(z; p)$ la somme de tous termes de la forme $u(x_1, \dots, x_m)$ où, parmi les x_i ($i = 1, \dots, m$), il y en a exactement p_j qui sont égaux à z_j , pour $j = 1, \dots, r$. S'il n'existe aucun terme de cette forme, on convient que $\tilde{u}(z; p) = 0$.

On a alors le résultat suivant.

3 Théorème. < 1 >. Soient u et v des éléments de $L_m(E; F)$. On suppose que $u(x, \dots, x) = v(x, \dots, x)$ pour tout $x \in E$ (autrement dit, u et v déterminent le même polynôme homogène). Alors

$$\tilde{u}(z; p) = \tilde{v}(z; p) \text{ pour tous } z \in E^r, \quad p \in \mathbb{Z}^r.$$

On établit ce théorème en utilisant le résultat suivant.

Pour $p = (p_1, \dots, p_r) \in \mathbb{N}^r$ et $t = (t_1, \dots, t_r) \in K^r$, on pose $t^p = t_1^{p_1} \dots t_r^{p_r}$, convention des multiindices, et $|p| = p_1 + \dots + p_r$.

4 Lemme. $< 2 >$. Soient m, r , des entiers naturels et, pour chaque $p \in \mathbb{N}^r$ tel que $|p| \leq m$, soit a_p un élément de E . Si $\sum_{|p| \leq m} t^p a_p = 0$ pour tout $t \in K^r$, alors $a_p = 0$ pour tout $|p| \leq m$.

5 Dérivation suivant une série formelle.

Soient $\xi \in X[X]_r$ et $f \in F[X]_m$.

On suppose que f est **déterminé** par $u \in L_m[X; F]$. Pour chaque $x \in X$, on désigne par $(\xi f)(x)$ la somme de tous les termes de la forme $u(x_1, \dots, x_m)$ où, parmi les x_i ($i = 1, \dots, m$), un seul est égal à $\xi(x)$ et les autres sont égaux à x . Autrement dit,

$$(\xi f)(x) = \tilde{u}((\xi(x), x); (1, m-1)).$$

Cela définit une application $\xi f : X \rightarrow F$.

On montre (proposition $< 3 >$), que ξf est un polynôme homogène. Il ne dépend pas du choix de u , d'après le théorème 3, et l'on a $\xi f \in F[X]_s$ où $s = r + m - 1$, avec la convention $F[X]_s = \{0\}$ pour $s < 0$.

Définition. On écrira $S(X)$ au lieu de $X[[X]]$.

Soient $\xi = (\xi_r) \in S(X)$ et $f = (f_m) \in F[[X]]$ des séries formelles. Pour tout $s \geq 0$, posons

$$g_s = \sum_{r+m-1=s} \xi_r f_m.$$

On désigne par ξf la série formelle $(g_s) \in F[[x]]$ et on l'appelle **dérivée de f suivant ξ** .

6 L'algèbre de Lie $S(X)$. Etant données des séries formelles ξ et η dans $S(X)$, on peut considérer $\xi\eta$ la dérivée de η suivant ξ , et $\eta\xi$ la dérivée de ξ suivant η . On pose $[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi$.

On montre alors, (théorème $< 4 >$), que l'espace vectoriel $S(X)$ muni du crochet ainsi défini est une algèbre de Lie.

7 Action d'une algèbre de Lie sur un espace vectoriel. On appellera **action formelle** (à droite) de l'algèbre de Lie A sur l'espace vectoriel X tout homomorphisme d'algèbres de Lie $D : A \rightarrow S(X)$. Ainsi, on fait agir l'algèbre de Lie A sur l'espace vectoriel X au travers de son algèbre de Lie $S(X)$.

Exemple originel. On suppose que $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , que A est une algèbre de Lie normable complète et que X est un espace de Banach. On considère un voisinage ouvert U de 0 dans X , et une **loi d'opération infinitésimale à droite**, analytique, $a \mapsto D_a$, de A dans la variété analytique U (voir Bourbaki [4], p.139).

Ainsi, pour chaque $a \in A$, le champ de vecteurs D_a sur U est analytique. Bien entendu, l'injection canonique $h : U \rightarrow X$ est analytique. On considère l'application $D_a(h) : U \rightarrow X$ (voir Bourbaki [2], 8.2.2 et 8.2.3, p.10).

Elle est analytique donc représentable au voisinage de l'origine par une série formelle (convergente) à composantes continues, c'est-à-dire par un élément de $\hat{P}(X; X) \subset S(X)$, que nous désignerons encore par D_a .

On vérifie (théorème < 5 >) **que l'application $D : A \rightarrow S(X)$ ainsi définie est une action formelle de A sur X .** On dira que c'est l'action formelle **déduite** de la loi d'opération infinitésimale donnée.

8 Produit d'entrelacement. On considère une action formelle D de A sur X et une action formelle d de B sur Y . On considère les deux espaces vectoriels produits

$$W = A[[Y]] \times B \quad \text{et} \quad Z = X \times Y.$$

On va définir d'abord une structure d'algèbre de Lie sur W , que l'on appellera **produit d'entrelacement**, puis une action formelle $\Delta : W \rightarrow S(Z)$, que l'on appellera **action triangulaire**.

8.1 Crochet sur $A[[Y]]$.

Pour $f \in A[Y]_n$ et $g \in A[Y]_r$ et chaque $y \in Y$, on pose $[f, g](y) = [f(y), g(y)]$. Cela définit une application $[f, g] : Y \rightarrow A$. On vérifie (lemme < 6 >) que $[f, g] \in A[Y]_{n+r}$. Plus généralement, pour $f = (f_n) \in A[[Y]]$ et $g = (g_r) \in A[[Y]]$, on pose $[f, g]_s = \sum_{n+r=s} [f_n, g_r]$ et enfin $[f, g] = ([f, g]_s) \in A[[Y]]$.

Le **crochet** ainsi défini munit l'espace vectoriel $A[[Y]]$ d'une structure d'algèbre de Lie **héritée** de celle de A (proposition < 7 >.)

Désignons par $\mathfrak{d}(A[[Y]])$ l'algèbre de Lie des dérivations de l'algèbre de Lie $A[[Y]]$.

8.2 Homomorphisme de B dans $\mathfrak{d}(A[[Y]])$.

Reprenons l'action formelle $d : B \rightarrow S(Y)$. Pour chaque $b \in B$, on a $d_b \in S(Y)$; et pour chaque $a \in A[[Y]]$, la dérivée $d_b a$ de a suivant d_b appartient à $A[[Y]]$ (voir ci-dessus, au 5).

Ainsi d_b définit une application de $A[[Y]]$ dans elle-même. On vérifie (proposition < 8 >) que cette application est une dérivation de l'algèbre de Lie $A[[Y]]$ et on la désigne par $\sigma(b)$.

On obtient ainsi une application $\sigma : B \rightarrow \mathfrak{d}(A[[Y]])$ et on vérifie (proposition < 9 >) que σ est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

8.3 Crochet sur $W = A[[Y]] \times B$.

Soient (a, b) et (a', b') des éléments de W .

On pose

$$[(a, b), (a', b')] = ([a, a'] + d_b a' - d_{b'} a, [b, b']).$$

Cela définit sur W une structure d'algèbre de Lie qui n'est autre que le **produit semi-direct** de l'algèbre de Lie B par l'algèbre de Lie $A[[Y]]$ relativement à l'homomorphisme σ défini ci-dessus (voir Bourbaki [3], p. 17-18).

Bien entendu, l'algèbre de Lie W ainsi construite ne dépend que de A , de B et de l'action $d : B \rightarrow S(Y)$, mais pas de l'action $D : A \rightarrow S(X)$. On la désignera par $W(A, B; d)$ et on l'appellera **produit d'entrelacement** de l'algèbre de Lie B par l'algèbre de Lie A relativement à l'action d .

9 Action triangulaire.

Considérons à nouveau une action D de A sur X , une action d de B sur Y , le produit d'entrelacement $W = W(A, B; d)$ et l'espace vectoriel produit $Z = X \times Y$.

L'algèbre de Lie $S(Y)$ s'identifie naturellement à une sous-algèbre de Lie de $S(Z)$ (lemme < 10 >).

On pose $T = S(X)$ et on considère $T[[Y]]$ l'espace des séries formelles à variables dans Y et coefficients dans T . On l'identifie canoniquement à un sous-espace de $S(Z)$ (théorème < 11 >).

Or, à chaque $a \in A[[Y]]$ et chaque $y \in Y$ correspond une série formelle $D_a \in T[[Y]]$ que l'on identifie à l'élément correspondant de $S(Z)$. Enfin pour $(a, b) \in A[[Y]] \times B$, on pose

$$\Delta_{(a,b)} = D_a + d_b \text{ un élément de } S(Z).$$

On montre (théorème < 12 >) que l'application ainsi définie

$$\Delta : W \rightarrow S(Z)$$

est une action formelle de W sur Z . On l'appellera **action triangulaire**, produit de l'action d par l'action D .

Pour

$$a \in A[[Y]] , \ b \in B , \ x \in X , \ y \in Y,$$

on donne un sens à l'égalité

$$\Delta_{(a,b)}(x, y) = D_{a(y)} + d_b(y).$$

On dira, de manière imagée, que l'action de W au point (x, y) est le résultat de l'action de B au point y et d'une action ... **qui dépend de y** ... de A au point x .

10 Action fondamentale d'une algèbre de Lie sur elle-même.

Pour le crochet $[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi$ (voir ci-dessus, au 6), on a vu que $S(B)$ est une algèbre de Lie.

On va définir un homomorphisme canonique d'algèbres de Lie

$$d : B \rightarrow S(B)$$

de la manière suivante.

On commence par considérer la *série génératrice*

$$(1) \quad G(T) = \frac{Te^T}{e^T - 1} = \sum_{n \geq 0} t_n T^n.$$

Les coefficients t_n appartiennent au corps K . Plus précisément,

$$t_0 = 1 , \ t_1 = 1/2 \text{ et, pour } n \geq 1 , \ t_{2n} = \frac{b_{2n}}{(2n)!} , \ t_{2n+1} = 0,$$

où les b_{2n} sont les nombres de BERNOULLI.

Pour $b \in B$, $y \in Y$, $s \in \mathbb{N}$, posons

$$d_{b,n}(y) = t_n(\text{ad } y)^n(b)$$

où $\text{ad } y : B \rightarrow B$ désigne l'application linéaire adjointe

$$(\text{ad } y)(b) = [y, b].$$

Ainsi, $d_{b,n}$ est un polynôme homogène de degré n à variables et coefficients dans B (lemme < 13 >).

On désigne par $d_b = (d_{b,n})$ la série formelle correspondante. On définit ainsi une application canonique $d : B \rightarrow S(B)$, $b \mapsto d_b$, que l'on appellera l'action **fondamentale** de B .

Théorème. $< 14 >$. Pour toute algèbre de Lie B , l'action fondamentale $d : B \rightarrow S(B)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie, autrement dit, d est une action formelle (à droite) de B sur elle-même.

11 Remarque.

Lorsque B est une algèbre de Lie normable complète sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , on sait lui associer le **groupuscule de Lie défini par B** (voir Bourbaki [4], p. 168-169, ou Kirillov [5]). Soit G ce groupuscule (G est un voisinage de 0 dans B). Bien entendu, l'algèbre de Lie $L(G)$ de G s'identifie à B .

Il existe, par hypothèse, **un morceau** de loi d'opération à droite analytique canonique du groupuscule G sur la variété G . Et, à ce **morceau** de loi, correspond une **loi d'opération infinitésimale à droite** analytique D de $B = L(G)$ dans G (voir Bourbaki [4], p. 165).

Dans ce cas, on montre (théorème $< 15 >$) que **l'action fondamentale** de B n'est autre que l'action à droite de B sur B **déduite** de D (voir ci-dessus, l'exemple originel).

Pour $b \in B$, $y \in Y$, on a

$$(2) \quad d_b(y) = G(\text{ad } y)(b) = \sum_{n \geq 0} t_n (\text{ad } y)^n(b).$$

On donne un sens à cette égalité dans le cas général d'une algèbre de Lie quelconque.

12 Produit d'entrelacement de deux algèbres de Lie.

On appellera **produit d'entrelacement** de l'algèbre de Lie B par l'algèbre de Lie A le produit d'entrelacement $W(A, B) = W(A, B; d)$ où d est **l'action fondamentale** de B .

13 Représentation des extensions de B par A dans le produit d'entrelacement $W(A, B)$. C'est l'analogue, pour les algèbres de Lie, du premier théorème de Kaloujnine-Krasner sur les groupes abstraits quelconques (voir [6]).

Soit $A \rightarrow C \xrightarrow{p} B$ une extension de B par A . Autrement dit, p est un homomorphisme surjectif de l'algèbre de Lie C sur l'algèbre de Lie B , et A est le noyau de p .

Soit $s : B \rightarrow C$ une application K -linéaire quelconque telle que $p \circ s = \text{id}_B$ (autrement dit, s est une **section linéaire** de p). On va associer à s une application $f_s : C \rightarrow W(A, B)$ que l'on appellera la **représentation associée** à s .

Pour $c \in C$, $y \in B$, $m \in \mathbb{N}$, on pose $z = s(y)$ et

$$(3) \quad h_{c,m} = \frac{1}{m!} (\text{ad } z)^m(c) - \sum_{n+r=m} \frac{t_r}{(n+1)!} (\text{ad } z)^n(s \circ p)(\text{ad } z)^r(c)$$

où les coefficients t_r sont définis par la relation (1) ci-dessus. On montre (lemme < 16 >) que $h_{c,m}(y) \in A$. De sorte que $h_{c,m} \in A[B]_m$. Aisni $h_c = (h_{c,m}) \in A[[B]]$.

On pose enfin $f_s(c) = (h_c, p(c))$.

Théorème. < 17 >. Soit $A \rightarrow C \xrightarrow{p} B$ une extension de B par A . Pour toute section linéaire s de p , la représentation associée $f_s : C \rightarrow W(A, B)$ est un homomorphisme injectif de l'algèbre de Lie C dans l'algèbre de Lie $W(A, B)$.

Précisions. La première annonce de ces résultats a été faite sous forme d'un rapport préliminaire dans les "Abstracts of the A. M. S.", sous la référence 85T-27-237. Plus tard, une version de ce texte a été publiée dans *ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ* (ELEFTERIA) 3 (1985) 290-304.

Nota bene. La notion de produit d'entrelacement définie ci-dessus diffère essentiellement de celle de "verbal \mathfrak{V} -wreath product" introduite par A. L. ŠMELKÍN dans *Trans. Moscow Math. Soc.* **29** (1973) p. 239-252.

Voici une version courte en anglais

Wreath products and triangular actions of Lie algebras

ABSTRACT

Formal actions of Lie algebras over vector spaces are introduced in a purely algebraic way, as a mimic of infinitesimal operations of Banach Lie algebras over Banach analytic manifolds. In analogy with the case of abstract groups, complete wreath products and triangular actions are then defined for Lie algebras acting *en cascade* over vector spaces. Finally, a Kaloujnine-Krasner type theorem for Lie algebra extensions is proved.

A MODERATELY DETAILED ENGLISH SUMMARY

"Can wreath products for Lie groups be defined ?"

That was the question that M. Krasner once put to the first-named author.

The problem of defining the *true* wreath product of two Lie groups is not easy, and seems to be still open.

In order to get around the obstacle, and as a first step, we tried to find a good definition for the wreath product of two Lie **algebras**. That is what the present note is about.

A paper giving the details is in preparation. The numbers such as $< n >$ refer to that coming paper.

A brief sketch for the definition of the wreath product for Lie algebras.

All vector spaces and algebras are over a given field K of characteristic zero.

Let A and B be Lie algebras. Set

$$A[B]_n = \{f : B \rightarrow A : \exists u : B^n \rightarrow A \text{ an } n\text{-linear map such that } f(x) = u(x, \dots, x)\},$$

$$A[[B]] = \prod_{n \geq 0} A[B]_n, \quad S(B) = B[[B]].$$

A given $f \in A[B]_n$ is said to be **determined** by $u : B^n \rightarrow A$ whenever $f(x) = u(x, \dots, x)$.

For $f_p \in A[B]_p$, determined by u_p , and $g_q \in A[B]_q$, define

$$(g_q \cdot f_p)(x) = \sum_{1 \leq i \leq p} u_p(x, \dots, g_q(x), \dots, x), \quad g_q(x) \text{ in the } i\text{-th place.}$$

For $f = (f_p)$ and $g = (g_q)$ in $S(B)$, define

$$[f, g] = (h_n), \quad h_n(x) = \sum_{p+q=n+1} (f_p \cdot g_q - g_q \cdot f_p)(x).$$

For $f = (f_p)$ and $g = (g_q)$ in $A[[B]]$, define

$$[f, g] = (h_n), \quad h_n(x) = \sum_{p+q=n} [f_p(x), g_q(x)].$$

For the brackets defined above, $A[[B]]$ and $S(B)$ are Lie algebras, ($< 7 >$).

Next, define the t_n 's by their *generating function* :

$$G(T) = \sum t^n T^n = \frac{T e^T}{e^T - 1}.$$

Of course,

$$t_0 = 1, \quad t_1 = 1/2 \quad \text{and, for } n \geq 1, \quad t_{2n} = \frac{b_{2n}}{(2n)!}, \quad t_{2n+1} = 0,$$

where the b_{2n} 's are the BERNOLLI numbers. Then define $d : B \rightarrow S(B)$, setting

$$d_b(y) = \sum t_n (\text{ad } y)^n(b).$$

For any $b \in B$, the map $a \mapsto d_b \cdot a = \sum d_{b,q} \cdot a_q$ is a derivation of the Lie algebra $A[[B]]$; and the map $b \mapsto d_b$ is a Lie algebra homomorphism $\sigma : B \rightarrow \mathfrak{d}(A[[B]])$ of B into the derivation algebra of $A[[B]]$, ($< 14 >$).

Definition. We define the **wreath product** of the Lie algebra B by the Lie algebra A to be the semi-direct product $W(A, B) = A[[B]] \times_{\sigma} B$ relative to σ .

Representation of Lie algebra extensions.

Given any exact sequence $0 \rightarrow A \rightarrow C \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$ of Lie algebras, any linear section $s : B \rightarrow C$ of p , (i.e. $p \circ s = \text{id}_B$), any elements $c \in C$ and $y \in B$, set $z = s(y)$ and

$$h_{c,m} = \frac{1}{m!} (\text{ad } z)^m(c) - \sum_{n+r=m} \frac{t_r}{(n+1)!} (\text{ad } z)^n (s \circ p)(\text{ad } z)^r(c),$$

$$h_c = (h_{c,m}) , \quad f(c) = (h_c, p(c)).$$

Then $f : C \rightarrow W(A, B)$ is an injective Lie algebra homomorphism, ($< 17 >$).

Moreover, general actions of Lie algebras over vector spaces are introduced, as a new notion. We also exhibit a natural *triangular* action of the wreath product $W(A, B)$ over the vector product space $A \times B$.

Here are a few hints about those generalizations.

MORE DETAILS

All vector spaces and algebras are over a given field K of characteristic zero. In the sequel, E, F, X, Y , are vector spaces, A, B, C , are Lie algebras, while m, n, r , are integers.

In order to define the wreath product of two Lie algebras, we needed a notion of an **action** for Lie algebras which had to be general enough for our needs. We were thus lead to introduce a certain number of new tools (which might also be interesting for their own sake). Here are some of them.

We introduced, namely, the notion of a derivation relative to a *formal series with variables and coefficients in a vector space X* . This leads to the introduction of a new object **the Lie algebra $S(X)$ of formal series on X** .

For each m , $L_m(E; F)$ is the set of m -linear maps $E \rightarrow F$.

1 Formal series. A map $f : E \rightarrow F$ is called a **homogeneous polynomial having degree m with variables in E and coefficients in F** whenever there is a $u \in L_m(E; F)$ such that

$$f(x) = u(x, x, \dots, x) \quad \text{for each } x \in E.$$

Then, f is said to be **determined** by u .

Let $F[E]_m$ be the set of all those homogeneous polynomials having degree m . This set is, naturally, endowed with a structure of vector space (over K). Let

$$F[E] = \bigoplus_m F[E]_m, \quad F[[E]] = \prod_m F[E]_m.$$

We then define a **polynomial** (resp. a **formal series**) with variables in E and coefficients in F to be any element in $F[E]$ (resp. in $F[[E]]$).

2 Symmetrisation. For each

$$u \in L_m(E; F), \quad z = (z_1, \dots, z_r) \in E^r, \quad p = (p_1, \dots, p_r) \in \mathbb{Z}^r,$$

if $m = p_1 + \dots + p_r$, let $\tilde{u}(z; p)$ be the sum of all terms having the form $u(x_1, \dots, x_m)$ where, among the x_i 's ($i = 1, \dots, m$), exactly p_j are equal to z_j . If no such terms exist, just set $\tilde{u}(z; p) = 0$.

3 When u and v both determine the same homogeneous polynomial, then $\tilde{u}(z; p) = \tilde{v}(z; p)$ for all $z \in E^r$, $p \in \mathbb{Z}^r$, ($< 1 >$).

5 Derivation relative to a formal series.

Let $\xi \in X[X]_r$ and $f \in F[X]_m$.

Suppose that f is **determined** by $u \in L_m[X; F]$. For each $x \in X$, let $(\xi f)(x)$ be the sum of all terms of the form $u(x_1, \dots, x_m)$ where, among the x_i 's ($i = 1, \dots, m$), only one is equal to $\xi(x)$ and the others are all equal to x . That is,

$$(\xi f)(x) = \tilde{u}((\xi(x), x); (1, m-1)).$$

Whence a map $\xi f : X \rightarrow F$.

We show that ξf , a homogeneous polynomial ($< 3 >$) which does not depend on the choice of a particular u , is such that $\xi f \in F[X]_s$ where $s = r + m - 1$, and it is agreed that $F[X]_s = \{0\}$ for $s < 0$.

Definition. Write $S(X)$ for $X[[X]]$.

Let two formal series $\xi = (\xi_r) \in S(X)$ and $f = (f_m) \in F[[X]]$ be given. For each $s \geq 0$, let

$$g_s = \sum_{r+m-1=s} \xi_r f_m.$$

Denote by ξf the formal series $(g_s) \in F[[x]]$, and call it the **derivative of f relative to the formal series ξ** .

6 The Lie algebra $S(X)$. Given formal series ξ and η in $S(X)$, take $\xi\eta$, the derivative of η relative to ξ , and $\eta\xi$, the derivative of ξ relative to η . Set $[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi$.

The vector space $S(X)$ with the bracket thus defined on it is a Lie algebra, ($< 4 >$).

7 Action of a Lie algebra over a vector space. A **formal action** of a Lie algebra A over a vector space X is defined to be any Lie algebra homomorphism $D : A \rightarrow S(X)$. Thus, the Lie algebra A acts over the vector space X *through* its Lie algebra $S(X)$.

The original example. Take $K = \mathbb{R}$ or \mathbb{C} . Suppose A is a complete normable algebra and X a Banach space. Take an open neighbourhood U of 0 in X , and an analytic **infinitesimal operation law**, $a \mapsto D_a$, of A in the analytic manifold U (see Bourbaki [4], p.139).

Thus, for each $a \in A$, the vector field D_a on U is analytic. Of course, the natural embedding $h : U \rightarrow X$ is analytic. Consider the map $D_a(h) : U \rightarrow X$ (see Bourbaki [2], 8.2.2 et 8.2.3, p.10).

Since it is analytic, it is represented as a (convergent) formal series, having continuous components, in the neighbourhood of 0, that is, an element of $S(X)$, which we still denote D_a .

The map $D : A \rightarrow S(X)$ thus defined is a formal action of A over X , ($< 5 >$).

8 Wreath products. Let a formal action D of A over X and a formal action d of B over Y be given. Take the two vector spaces

$$W = A[[Y]] \times B \quad \text{and} \quad Z = X \times Y.$$

We first endow W with a Lie algebra structure, which we call the **wreath product**, and then define a formal action $\Delta : W \rightarrow S(Z)$, which we call the **triangular action**.

8.1 The bracket on $A[[Y]]$.

For $f \in A[Y]_n$ and $g \in A[Y]_r$ and each $y \in Y$, set $[f, g](y) = [f(y), g(y)]$. This defines a map $[f, g] : Y \rightarrow A$, and $[f, g] \in A[Y]_{n+r}$, ($< 6 >$). More generally, for $f = (f_n) \in A[[Y]]$ and $g = (g_r) \in A[[Y]]$, set $[f, g]_s = \sum_{n+r=s} [f_n, g_r]$ and also $[f, g] = ([f, g]_s) \in A[[Y]]$. This is a Lie algebra bracket on $A[[Y]]$, ($< 7 >$).

Let $\mathfrak{d}(A[[Y]])$ be the Lie algebra of the derivations of the Lie algebra $A[[Y]]$.

8.2 A homomorphism from B into $\mathfrak{d}(A[[Y]])$.

Take the formal action $d : B \rightarrow S(Y)$. For each $b \in B$, we have $d_b \in S(Y)$; and for each $a \in A[[Y]]$, the derivative $d_b a$ of a relative to d_b belongs to $A[[Y]]$. So d_b is a map from $A[[Y]]$ into itself. This map is a derivation of the Lie algebra $A[[Y]]$ which we denote as $\sigma(b)$, ($< 8 >$). This map $\sigma : B \rightarrow \mathfrak{d}(A[[Y]])$ is a Lie algebra homomorphism, ($< 9 >$).

8.3 The bracket on $W = A[[Y]] \times B$.

Let (a, b) et (a', b') be elements of W .

Set

$$[(a, b), (a', b')] = ([a, a'] + d_b a' - d_{b'} a, [b, b']).$$

This turns W into a Lie algebra which is the **semi-direct product** of the Lie algebra B by the Lie algebra $A[[Y]]$ relative to the homomorphism σ , (see Bourbaki [3], p. 17-18).

Of course, this Lie algebra W depends only on A , B , and the action $d : B \rightarrow S(Y)$, but not on $D : A \rightarrow S(X)$. We denote it as $W(A, B; d)$ and call it **the wreath product** of the Lie algebra B by the Lie algebra A relative to the action d .

9 The triangular action.

Take again an action D of A over X , an action d of B over Y , the wreath product $W = W(A, B; d)$ and the vectorial product space $Z = X \times Y$.

The Lie algebra $S(Y)$ is identified, in a natural way, to a Lie subalgebra of $S(Z)$, ($< 10 >$).

Let $T = S(X)$ and take $T[[Y]]$, the space of formal series with variables in Y and coefficients in T , canonically identified to a subspace of $S(Z)$, ($< 11 >$).

To each $a \in A[[Y]]$ and each $y \in Y$ there corresponds a formal series $D_a \in T[[Y]]$ identified to the corresponding element in $S(Z)$. Now, for $(a, b) \in A[[Y]] \times B$, let

$$\Delta_{(a,b)} = D_a + d_b \text{ an element in } S(Z).$$

The map $\Delta : W \rightarrow S(Z)$ is a formal action of W over Z , the **triangular action**, a product of the actions d and D , ($< 12 >$).

For

$$a \in A[[Y]] , b \in B , x \in X , y \in Y,$$

the following equality makes sense :

$$\Delta_{(a,b)}(x, y) = D_{a(y)} + d_b(y).$$

One can say, figuratively, that the action of W at point (x, y) is the result of the action of B at point y and an action ... **which depends on y ...** of A at point x .

BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki, N., *Variétés différentielles et analytiques, Fascicule des résultats, paragraphes 1 à 7*, Hermann, Paris, 1967.
2. ———, *Variétés différentielles et analytiques, Fascicule des résultats, paragraphes 8 à 15*, Hermann, Paris, 1971.
3. ———, *Groupes et algèbres de Lie, Chapitre 1*, Hermann, Paris, 1972.
4. ———, *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 2 et 3*, Hermann, Paris, 1972.
5. Kirillov, A., *Eléments de la théorie des représentations, traduction françaises*, Editions Mir , Moscou, 1974.
6. Neumann, H., Varieties of groups (theorem 22.21), Springer , Berlin, 1967, pp. 45-46.